Nola laguntzen dute objektu manipulagarriek matematikaren ikaskuntzan?

SIGMA: matematika aldizkaria (2007)

José Domingo Villarroel Villamor
Euskal Herriko Unibertsitatea
Matematika eta zientzia esperimentalen didaktikaren saila
Gasteizko Irakasle Eskola

Laburpena

Abakoak, bloke base anitzak, bloke logikoak eta Cuisinaire-ren erregeletak izaten dira, besteak beste, matematikako kontzeptuen irakaskuntzarako maiz ikaslearen eskutan jartzen diren tresna didaktikoak.

Bibliografian izen ezberdinez ezagunak (esaterako: manipulagarria, konkretua ala baliabide estrukturalak), instrumentu didaktiko hauen inguruko erabilgarritasuna nabarmendua izan da, bai gelako esperientziatik ikusita (Grouws eta Cebulla 2000; Cascallana, 1988) bai ikerkuntzaren aldetik (Cañizares, 2003; Villarroya, 1994; Martín, 1998; Fernández, 1989; Sowell, 1989; Suydam & Higgins, 1977).

Hala eta guztiz ere, zenbait autorek azpimarratu dute tresna didaktiko hauen inguruan egin den ikerketari sakontasuna falta zaiola, bereziki argitzeko, noizbait, agerturiko datu kontrajarriak eta ezagutzeko zein baldintzatan suertatzen diren eraginkorren (Uttal eta DeLoache-ek,1997 eta Clements, 1999).

Artikulu honetan zehar objektu manipulagarriek matematikaren ikaskuntzarako duten balioaz egin diren ikerlanen errebisioa egiten da baita didaktika hauen fundamentu teoriakoez ere. Jarraian testuaren autoreak bere irakaslanetan izandako lau adibide didaktikoren transkripzioa eskaintzen da, ikuspegi sozio-konstruktibistatik aztertuko direnak. Bukaeran aurkezten dira zenbait ondorio didaktikoa tresna hauen erabilpena gidatzeko balio dezaketenak.

Gako hitzak: matematika, didaktika, objektu manipulagarria

Summary

Abaco, pattern blocks, Cuisenaire rods, and geoboards are hands-on tools in mathematics classes which are known as manipulatives or concrete materials. Not only the teaching activity (Grouws & Cebulla 2000; Cascallana, 1988) as well the research too (Cañizares, 2003; Villarroya, 1994; Martín, 1998; Fernández, 1989; Sowell, 1989; Suydam & Higgins, 1977) have pointed out that these educational instruments can be a very useful to help to achieve a good conceptual understanding in mathematics.

Nevertheless some researchers have claimed that it is necessary a better comprehension about the conditions that establish the correct work of these didactical tools (Uttal & DeLoache, 1997; Clements, 1999).

In this paper the author presents, firstly, a full revision about the research on the manipulatives for teaching mathematics. Secondly, four educational experiences have been transcribed to present educational examples about how to use manipulatives to improve student' understanding. Finally a socio-constructivist point of view is used to analyze the utility of these tools and to put on show some didactic recommendations.

Key words: mathematics, education, manipulative

Tresna didaktiko konkretu ala manipulatzekoak

Matematikaren irakaskuntzaren historian zehar, objektu manipulagarrietan errotzen diren hainbat estrategia didaktiko diseinatu dira jakintzagai horren oinarrizko kontzeptuak ulertarazteko. Objektu hauek, esplizituki erakargarri izanik, eginda daude ikasleak eskuzta eta manipula ditzan, jokoak balira bezala. Bere forma, kolore ala aniztasunak erabiltzailearen jakin-mina pizten dute eta, oro har, haztakatzeko gonbite dira. Hauen artean, bere baliagarritasunagatik aipatzekoak dira, besteak beste, bloke base anitzak, bloke logikoak, abakoak, puzzleak, balantzak, dadoak, kartak, zinta metrikoa, Cuisinaire-ren erregeletak eta geoplanoa (Cañizares, 2003; Martín, 1998; Fernández, 1989; Cascallana, 1988).

> *Material manipulagarria baliabide didaktikoa da, ezagutza matematikoa sortzeko eskuen erabilpena sustatzen duena. Material honekin lotzen diren ekintzak ondoko hauek izan daitezke: ukitu, moldeatu, apurtu, batu, elkartu, uztartu eta kordatzea (Cañizares, 2003, 237.orr.).*

Matematikaren irakaskuntzarako esplizituki eratuta dauden instrumentu didaktiko hauek izen ugariz dira ezagunak. Maiz *objektu manipulagarri* ala *eskuztagarri* moduan aipatuak izaten dira. Besteetan, ingeleseko bibliografiatik harturik, *objektu konkretua* deitzen zaie (Clements, 1999; Villarroya, 1994). Noizbait ordea, didaktika arloko *elementu estrukturala* gisa ere dira ezagun; hain zuzen ere, gelako errekurtso behin-behinekoetatik bereizteko (Cascallana, 1988). Artikulu honetan zehar, hortaz, matematikarako bitarteko didaktikooi izen horiekin guztiekin erreferentzia egingo zaie; hau da: objektu eta tresna manipulagarri, eskuztagarri, konkretu ala estrukturalak.

Tresna manipulagarriok joko itxura izanik ere, pentsatuta daude, esan bezala, oso bestelako eginkizunetarako. Haien diseinuan sortuak dira *zubi* lana egin dezaten ikaslearen esperientzia sentsorial eta matematika kontzeptuen artean eta, ondorioz, euren erabilpena proposatzen da hasiberriari ulertzen laguntzeko abstrakzio mailagatik helezin suerta daitezkeen matematika nozioak.

Zentzu honetan Grouws eta Cebulla-k (2000) ikaskuntza matematikoa sustatzen duten hezkuntza praktika zehatzen inguruko serie batean nabarmentzen zituzten material manipulagarrien erabilpenaren hobariak. Autore hauen ustez, eta matematikaren didaktikari buruz eginiko ikerkuntza erreferentzia hartuta, baiezta daiteke instrumentu manipulagarrien bidezko irakaslanek ziurtatzen dituztela emaitza hobeak kontzeptuen arloan.

Ildo honetan hainbat ikerlariek seinalatu dute pentsamendu abstraktuaren eraketa lotuta dagoela esperientzia sentikorrarekin. Horren ondorioz, instrumentu konkretuetan oinarritzen diren didaktikek ulerkuntza matematikarako aukera paregabea eskaintzen dute; hain zuzen ere, ikasleari bide ematen diotelako sortzeko barne irudi, modelo ala errepresentazioak, geroan erabil ditzakeenak kontzeptu abstraktuen manipulaziorako (Moyer, 2001; Marzano, 2000; Welch, 1997; Ball, 1992).

Bestalde, tratamendu sinboliko hutsaz erroturiko irakats jarduerekin konparatu direnean, atzeman da tresna manipulagarrien bidez gidaturiko ikasgelako aktibitateak efektiboagoak direla eta eraginkortasun horrek ez duela lotura adierazten ez umeen matematikarako abilezia ala hasierako ezagutza mailarekin ezta ikasleen estatus sozioekonomikoarekin ere (Suydam & Higgins, 1977). Honez gain, teknika hauek efektiboagoak agertu dira heziketa maila guztietako ikasleentzat baita kontzeptu anitzen irakaskuntzaren kasuetarako ere (Sowell, 1989).

Arlo afektiboan ere ikusi da objektu manipulagarrien erabilpenak eragin desiragarria duela ikasleriaren ikasgaiarekiko jarreran (Grouws eta Cebulla, 2000; Modesto, 1998). Clements-ek (1999) eta Sowell-ek (1989) ere seinalatzen dute didaktika hauek, irakasle trebatuen aldetik martxan jartzen direnean, areagotzen dituztela ikasleen lorpen matematikoak ez ezik ikasgaiarekiko aurreiritzi positiboak ere.

Bestalde, objektu manipulagarrien erabilpena matematikaren irakaskuntzan izan duen arrakasta justifikatua izan da hainbat ikuspegi teorikotatik.

Piaget-en teoriaren arabera pentsamendu abstraktuaren garapena subjektuak, errealitatea ezagutu guran, objektu fisikoekin izaten duen elkarrekintzan datza. Elkarrekintza honen bidez adierazten da kontzeptuak ez direla subjektuarengandik at dagoen entitateak baina, bestalde, ez direla, berez, subjektuaren baitan jaiotzen. Aitzitik, ideia matematikoak subjektuak sortzen ditu objektuak eraginez, adibidez, korrespondentziak sortuz, objektuak ordenatuz, batuz ala berezituz eta abar (Martín, 1998). Piageten ideia hauetan errotzen dira tresna manipulagarrien bidez garatu diren hainbat teknika; adibidez, bloke logiko ala segidekin zerikusirik dutenak (Cascallana, 1988).

Bruner-rek ere (1961) seinalatzen zuen objektu eskuztagarrietan erroturiko matematika-didaktiken garrantzia. Bere ustetan errealitatearen irudikapenak eta barne modeloen sorkuntza ondoko hiru faseotan suertatzen da: fase enaktiba, ikoniko eta sinbolikoa. Objektu fisikoek zeharo garrantzia izango lukete, perspektiba honetatik, lehendabiziko fasean zeinetan errealitatea irudikatua izaten den objektuetan eragiten diren akzioen bidez. Hala, pentsalari honek biziki gomendatzen zuen nozio matematikoen irakasteko ezaugarri fisiko ezberdineko objektu ugari erabiltzea; hain zuzen ere, ikasleari aukera emateko ezaugarri sentsorialetatik at kontzeptu matematikoak duen esanahia atzemateko.

Ezagutzaren eraikuntza sozialaren ikuspegitik ere aztertuak izan da objektu konkretuen balioa didaktikoa. Vygotsky-ren eraginez onartzen da pentsamendu matematikoa garatzen dela, bereziki, testuinguru sozialetan non uztartzen diren matematikako edukiak, tresna manipulagarriak eta eragile konpetente baten gainbegiratzea (irakaslea ala gurasoak). Eragile honek Garapen-Zona Hurrenean suspertuko luke ikaslearen matematikako kontzeptu konplexuen eraikuntza eta bere eragina efektiboagoa litzateke errealitatearekin interakzio bakartia ala kideengandik jasotako eragina baino (Starkey et al. 2004).

Perspektiba honetan nabarmentzen da, batez ere, matematikaren irakaskuntzarako objektu manipulagarriek tresna sozialaren rola dutela esangura komunen eraikuntzarako (Moyer, 2001). Ildo honetan, Meira-k (1998) aztertu zuen nola eskolaumeek erabiltzen zituzten elementu fisikoak kontzeptu matematikoen zentzua hautemateko eta honen arabera, ikasleek matematika-kontzeptuez adierazten zuten adikuntza lotuago dago beraiek sartuak izan diren praktika soziokulturalekin, objektuen ezaugarri fisikoekin baino. Fueyo eta Bushell-en (1998) ikerketak tresna manipulagarrien erabilpen didaktikoan interakzio sozialak duen garrantzia nabarmentzen zuten. Honen arabera, ikasleen hobekuntza objektu konkretuak erabiltzean oso estekatuta dago irakasleen partetik ikasleek jasotzen dituzten prozedurei buruzko azalpen eta eginiko lanen inguruko *feedback*-ekin.

Alabaina, eta aipaturiko ikerkuntza eta oinarri teorikoa gorabehera, aintzat hartu behar da tresna manipulagarri edo material konkretuetan oinarrituriko didaktiken inguruan zalantzak ere badaudela.

Alde batetik, zenbait autorek seinalatu dute material manipulagarrien inguruko datuak aldakorrak direla, baita ikerketen aldagaiak hertsiki kontrolatuak izaten diren kasuetan ere (Thompson, 1992; Resnick eta al, 1987; Labinowicz,1985).

Bestalde, ikasgeletako ikuspegitik matematikaren irakatsi eta ikasteko prozesuetan ezinbesteko elementuak izanik ere (Hiebert et al, 1992), zenbait autorek nabarmendu dute ikerketa aski ez dela egin material hauen inguruan umeek egiten dituzten benetako erabilpenaz. Honen ildotik, tresna manipulagarriak ikasleen partetik hain modu esanguratsuan erabiltzen ez ote diren susmoa dago (Ginsburg et al.2004).

Zentzu honetan, argi dirudi objektu manipulagarriek ez dakartela, berez, matematika kontzeptuen esangura eta, ondorioz, objektu hauek eskuztatzeaz aparte, benetako ulerkuntza sortuko bada bestelako baldintzak direla beharrezko.

Hauen artean bereziki nabarmendu da irakasleak eskolaumearengan suspertzea erlazio sinbolikoei buruzko ulerkuntza sakona. Honek adierazi gura du ulertzea zein lotura dagoen objektu manipulagarri eta matematika-kontzeptuak formalki adierazteko erabiltzen diren bestelako sinboloen artean.

Ulerkuntza mota hori azter daiteke ondoko pasadizo didaktiko hau zeinetan sistema hamartarrean zenbakien posizioak duen rola da mintzagai irakaslea eta zaion zazpi urteko ikasle baten artean.

1 <u>Irakasle</u>: *Hara bi zenbakiok: 23 eta 103. Zeinek du hamarreko gehiago?*
2 <u>Olatz</u>: *23.*
3 <u>Irakasle</u>: *Zergatik?*
4 <u>Olatz</u>: *2 dituelako.*
5 <u>Irakasle</u>: *Abakoan jarriko duzu 103?*
6 <u>Olatz</u>: *hala...* [Abakoan bola bat jartzen du ehunekoan eta 3 batekoei dagokien lekuan].
7 <u>Irakasle</u>: *Zenbat hamarreko du*
8 <u>Olatz</u>: *Zero.*
9 <u>Irakasle</u>: *eta bola hau...nola pasatuko zenuke hona...* [irakasleak eskatzen dio ehunekoa, 10 hamarreko moduan jartzeko].
11 <u>Olatz</u>: *Hamar bola jarriz.*
12 <u>Irakasle</u>: *Ondo, jar itzazu.*
13 <u>Irakasle</u>: *Eta orain,...zeinek du hamarreko gehien,...23 delako zenbakiak ala 103 delakoak*
14 <u>Olatz</u>: *23k...bi zenbakia duelako...*

Olatzek, antza, zuzen daki erabiltzen abakoa (ikusi 11.lerroaldea) baina kale egiten du lotzeko funtzionamendu hori zenbakien adierazpen formalarekin (ikusi 14.lerroaldea). Horren haritik, Uttal-ek (1997) nabarmentzen du tresna manipulagarrien bidezko didaktika ekintzek beti ziurtatu behar dutela erabiltzen diren objektu fisiko eta printzipio matematikoen arteko erlazio sinbolikoak eta hartara irakasleak ezin duela ahaztu umeak objektu konkretuez egiten duen interpretazioa. Thompson-ek (1992) ere agerrarazten du noraino garrantzizkoa den ikasleek atzematea direkziobiko erlazioa; hain zuzen, objektu manipulagarriek gorpuzten duten matematika kontzeptu eta notazio sistema formen artekoa.

Hala izan ezean, matematika nozioak ikasteko bide hutsala izateaz aparte Uttal-ek (1997) frogatu du objektu konkretuen bidezko erabilpen ez esanguratsuek errekurtso kognitibo gehiago exijitzen dietela ikasleei, afektiboki eragin negatiboa izan dezakeen fenomeno ez desiragarria.

Kontzeptu matematikoen ikaskuntza

Tresna manipulagarrien inguruko gogoeta eta praktika didaktikoek eta ikerkuntza lanek agerrarazten dute instrumentu didaktiko hauen paradigma kontrajarria. Alde batetik matematika ikaskuntzarako prozesuak hobetzeko bide egoki eta eraginkorra dirudite baina, beste aldetik, aitortzen da ikerkuntza falta hobeto zehazteko zein eratan suertatzen diren eraginkorren (Ginsburg, 2004; Uttal, 1997). Egoera kontrajarri hau hobeto ulertu guran, akaso kontzeptu matematikoen sorrerari heldu beharko litzaioke. Jarraian ikuspegi soziokonstruktibistatik abiatuta, matematikaren ulerkuntzaren inguruko interpretazioa eskaintzen da, geroan tresna manipulagarrien erabilpen didaktikoa azaltzeko erabiliko dena.

Matematika lengoaia sinbolikoa da eta diziplina honek sinboloak erabiltzen ditu adierazteko problemak, beraiek manipulatzeko eta ebazpenen berri eman ahal izateko. Sinboloek funtzio instrumental eta komunikatiboa dauzkate.

Sinboloak beste entitate baten errepresentazioak dira; matematikako sinboloak entitate kontzeptualak ordezkatzen dituzte eta honixe gagozkion adierazten dugunean kontzeptu baten esanahia.

Bi elementu hauek, sinbolo eta esanahia, ezinbestekoak dira pentsamendu matematikoaren garapena suspertzeko. Alde batetik atzeman behar dira kontzeptu matematikoen zentzutik eratortzen diren objektu matematikoak baina, hauekin batera, egoera problematiko eta bere soluzioak manipulatu eta komunikatzeko, beharrezkoak dira tresna semiotika eta bere sintaxia barneratuta izatea (Godino, 2006; Quintero et al. 2005).

Hau dela eta, matematika irakasle eta didaktika ikerlariek planteaturik dituzten xederik garrantzitsuenetakoa, sinbolo matematiken esanahi eta euren kontzeptuak ikasleei ulertzen laguntzean datza (Skemp, 1999).

Erronka, ordea, ez da makala. Alde batetik, sinbolo berbera kontzeptu ezberdinen erreferentzia izan daiteke (esate-baterako zenbaki berak izan dezake esangura ezberdina, objektu multzo baten kantitatea ala elementu baten ordena adieraztean). Baina, besteetan, sinbolo ezberdinek esanahi berbera izan dezakete (adibidez, lehenengo hezkuntzako azken zikloko eskolaumeek 2/4 eta 1/2 direlako sinboloetan zenbaki berbera *ikusi* behar dute).

Baina haratago joz, ba bide dago erronka didaktiko are konplexuagoa, sinbolo eta esanahien arteko erlazioan datzana: sinboloak ulertu eta zuen erabiltzeko beraiei dagozkien kontzeptuak barneratuta izateak ezinbesteko baldintza dirudi (zeren eta sinboloek ez dakarte, berez, esanahia) baina, bestaldetik, nola barnera daiteke izaera abstraktua duen kontzeptua, sinboloak zuzen erabili gabe?

Sorgin kurubilo honen askatze puntuan hainbat autorek esperientzia sentsorialean kokatu dute (Brown et. al., 1989; Lave, 1988; Lave & Wenger, 1991; Walkerdine, 1988; Villarroel, 2002) baina akaso elementu abstraktuen eraketan esperientzia sentsorialak jokatzen duen helduleku gisako zeregina ulertzeko proposamenik zehatzena Sfard-ena (2000a, 2000b) izan daiteke.

Sfard-en (2000a, 2000b) proposamenaren arabera, sinboloak hasten dira erabiltzen kontzeptu bera osatu izan aurretik. Bere ustez, diskurtso matematikoan sinbolo jakin bat sartutakoan, sinbolo horrekin egiten den erabilpena bera da sinboloei esanahia hornitzen diena.

Hartara, hasiberriak beharko ditu klixe edo estereotipo linguistikoak sinboloaren erabilpena ahalbideratuko dutenak. Esan daiteke erabilpen estereotipatu honek hasiberria gidatzen duela matematika diskurtsoan, aldamio moduko lana eginez eta, azken finean, erabiliz erabili, nozioaren beraren zentzua ezarriko duena. Sfard-ek argi uzten du objektu fisikoekin izaten dugun esperientzia sentsorialaren bidez eraturiko komunikazio-moldeak direla diskurtso abstrakturako klixe linguistikoen jatorria. Klixe hauek izango dira, bere hitzetan, *”metafora modukoak, transplante linguistikoetatik eratortzen direnak”* (Sfard, 2000a, 68.orrialdea).

Bestalde, kontzeptuen eraketan zeharo garrantzizkoa da interakzio komunikatiboa, zeren kontzeptu matematikoen sortze-prozesuan elkarrekintza komunikatiboak ikasleei laguntzen baitie diskurtso errealetik harturiko estereotipo linguistikoak sinboloek duten esanahi formaletara egokitzen.

Perspektiba honetatik, sinbolo, klixe linguistikoak eta elkarrekintza komunikatiboa izaten dira kontzeptu matematikoen sortzaile.

Nola laguntzen dute tresna manipulagarriek pentsamendu matematikoaren garapenean

Arestiko ideiak erabilgarriak izan daitezke ulertzeko nola tresna konkretuak lagungarriak suerta daitezkeen matematikaren irakaskuntzarako.

Horren ildotik, jarraian hiru pasarteren transkripzioak aurkeztuko dira, artikulu honen autoreak bizi izateko eskenatoki didaktiko ezberdinetan 2005-2006 eta 2006-2007 ikasturtetan.

1.kasua

Lehenengo adibide honetan transkribatzen den elkarrizketa Gasteizko Irakasle Eskolako ikasle batekin izandako pasartea da.

Irakur daitekeen bezala, ikasleak zailtasunak zituen ulertzeko nola zenbaki bera izan daitezkeen 55, base hamartarrean, eta 2001, base hirutarrean.

Irakasleak ulerkuntza sustatzeko, *bloke base anitza* errekurtsoa erabiltzen du (Cascallana, 1988).

1 Irakaslea: *…beraz,…sistema hamartarrean, 55ek eta 2001ek, sistema hirutarrean, zenbaki berbera (hau da, multzo berbera) adierazten dute.*
2 Ane: *ez dut ulertzen. 55 objektu eta 2001 objektu sekula ezin dira izan kantitate bera…*
3 Irakaslea: *bai,…baina aintzat hartu behar duzu basea ezberdina dela*
4 Ane: *ez dakit…*[pentsakor geratzen da zenbakietara begira]
5 Irakaslea: *begira kubotxo hauek* [irakasleak mahaiko tiradetatik bloke base anitzeko bilduma atera du]. *Joko bat proposatuko dizut. 10 kubo txikirekin erregeletatxo bat osatuko duzu eta 10 erregeletatxorekin plaka bat. Amaitzeko 10 plakarekin kubo handi osatuko duzu, bai?*
4 Ane: *Ondo*
5 Irakaslea: *zera, orain truka ezazu kubotxo kopuru hau erregeleta eta plakatxo moduan* [irakasleak hartzen du 55 kubotxo txiki eta mahaiaren gainean jartzen du]
6 Ane: *bai,… zera,…*[ikaslea hasten da kubo txikiak hamarka jarriz] *bai guztira…*
7 Irakaslea: *zenbat hamar kubotxoko talde egin duzu?*
8 Ane: *5 eta soberan ditu 5 kubo txiki.*
9 Irakasle: *Ondo. Zenbat erregeletatxoren truke alda dezakezu?*
10 Ane: *5, ezta?*
11 Irakaslea: *Bai, horixe. Baina, orain plakaren bat egin dezakezu?*
12 Ane: *Ez, gutxienez 10 erregeleta behar dut eta*.
13 Irakaslea: *Bai,… zera, zein zenbaki osatu dugu?*
14 Ane: *Zenbaki? Zein zenbaki?*
15 Irakaslea: *bai, begira 0* [plaka] *5* [erregeleta] *eta 5* [kubotxo]*, hau da, berrogeita hamabost..*
16 Ane: *Ah! Bai. Ondo dago.*
17 Irakaslea: *Oso ondo. Begira, orain aldatuko dugu jokoaren araua. 3 kubotxorekin osatuko da erregeleta bat eta hiru erregeletarekin egingo duzu plaka bat eta…*
18 Ane: *bai, badakit,…hiru plakarekin kubo handi bat, ezta?*
19 Irakaslea: *Bai horixe* [berriro 55 kubotxo jartzen ditu mahai gainean]
20 Ane: *zera,…*[ikaslea hasten da kubo txikiak hirunaka jarriz] *bai zera…guztira 18 talde, hiru kubotxokoak. Beraz 18 erregeleta eta soberan geratzen da kubotxo bat.*
21 Irakaslea: *Ondo, eta zenbat plaka egin dezakezu?*
22 Ane: [erregeletak ere hirunaka jartzen hasten da] *bada 18 erregeletarekin 6 plaka egin dezaket eta ez dago ezer soberan. Baina…* [plakak hirunaka ere elkartuz hasten da] *6 plaka hauek osatzen dute 2 kubo handi!*
23 Irakaslea: *Primeran. Zein zenbaki osatu duzu?*
24 Ane: *Ea bada…2* [kubo handi] *0* [plaka] *0* [erregeleta] *eta kubo txiki bat, beraz,,, bi mila eta bat.*
25 Irakaslea: *Eta bi mila eta bat horrek zein kubotxo kopuru irudikatzen du?*
26 Ane: *Ez dut ulertzen*
27 Irakaslea: *Bai,…esan gura dut ea zenbat kubo txiki behar izan dugun 2001 osatzeko.*
28 Ane: *Ah bai,…55*
29 Irakaslea: *Beraz 55 eta 2001 zenbakiak kantitate berberaren erreferentzia dira.*
30 Ane: *Bai baina lehenengoan trukearen araua "10" zen eta bigarrenean "3".*
31 Irakaslea: *Oso ondo bada…matematikan "trukearen araua" delako horri deitzen zaio basea eta hala idazten da* $2001_3 = 55_{10}$
32 Ane: *Orain bai.*

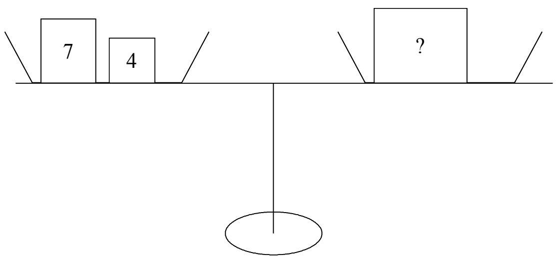
Anek zenbakien gainean duen ulerkuntza maila oso lotuta zegoen sistema hamartarrera eta adierazten zuen arazoa zenbakien basea aldatzeko behar bezalako zalutasuna ez izatea baino larrixeagoa zen. Bere arazo lotuta zegoen zenbaki-kontzeptuarekin berarekin; izan ere, Anek zifra eta zenbaki nozioak nahastuta zituen eta horregatik digitu ezberdinei zenbaki ezberdin egokitzea ezinbestekoa egiten zitzaion.

Irakasleak lagundu behar izan dio ulertzen zenbakiaren kontzeptua digituen gainetik dagoela eta lotuta dagoela kantitatearen iraunkortasunarekin. Hau lortzeko planteatzen duen estrategia didaktikoa zerean datza: ikustean nola erabil daitezkeen sinbolo ezberdinak kantitatea bera adierazteko. Tresna konkretuaren funtzioa zera da: sentsitiboki bide ematea kantitatearen iraunkortasunari eta ikusaraztea kantitate horri digitu ezberdinak eslei dakizkiokeela.

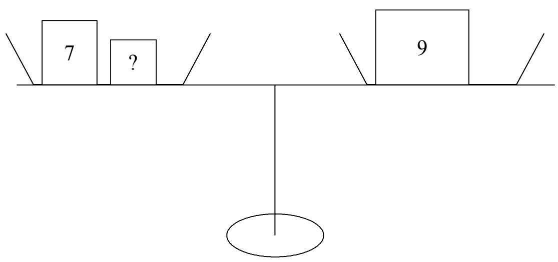
2.kasua

Bigarren adibide honetan transkribatzen da zortzi urteko eskolaume batekin izandako elkarrizketa, buruketa matematiko baten inguruan. Berez, mutikoak emaitza zuzen ematen du baina ebazteko bidean sinboloekin arazoak ditu. Auzia konpontzeko erabakigarria suertatzen da balantza baten erabilpenaren simulazioa.

1 Irakasle: *Demagun atzo 4 pokemon zenituela eta erosi dituzula 7 gehiago baina bidean 2 galdu dituzula. Zenbat pokemon duzu?*
2 Txomin: *Oso erreza,… 9 pokemon.*
3 Irakasle: *Bai? Idatziko didazu nola kalkulatu duzun?*
4 Txomin [ondoko hau idazten du]: *4 + 7 = 11 – 2 = 9*
5 Irakasle: *seguru zaude? Ondo dago idatzi duzuna?*
6 Txomin: *Bai, 4 gehi 7, 11, ken 2,...*[dudatan]*...bai 9.*
7 Irakasle: *Bada…, bai,...erantzuna zuzena da baina,...ondo dago idatzita?*
8 Txomin: *Ez dut ulertzen...txarto dado?*
9 Irakaslea: [Ezbaian egon ostean, beste orrialde batean irakasleak zera marrazten du]: *Begira zer ari naizen marrazten. Balantza bat da. Ikusten?* [Txominek buruaz baiezko



keinua egiten du]. *Hara, zure ustez, balantza orekan izateko, zenbat jarri behar eskuin erretiluan?*
10 Txomin: *11, ezta?*
11 Irakaslea: *Oso ondo. Begira beste hau: Zenbat jarri behar ezker erretiluan balantza orekan izateko?*



12 Txomin: *2,…?*

13 Irakaslea: *Horixe!*
Orain zera eskatu nahi dizut. Idatziko zenuke ondoko hauetan falta dena?
4 + 7 = ? [irakasleak idazten du berdintza hau lehenengo balantzaren parean]
7 + ? = 9 [irakasleak idazten du berdintza hau bigarren balantzaren parean]
[Txominek ondo betetzen ditu berdintzok, hurrenez hurren, 11 eta 2 idatziz]
14 Irakaslea: *Oso ondo. Zera,…azken galderatxoa,…hemen* [lehenengo berdintzara seinalatuz] *zeinek egiten du balantzaren papera?*
15 Txomin: *Balantza,…? Hemen,…?* [berdintza matematikora begira, puska batean geratzen da] *Ah! ¡Ya lo pillo¡ honek* [seinalatzen du "=" delako sinboloa].
16 Irakaslea: *Primeran! Eta hemen?.* [bigarren berdintzara seinalatuz] *zein da balantza?*
17 Txomin: *Beste hau* [berriro seinalatzen du "=" delako sinboloa].
18 Irakaslea: *Oso ondo, eta zer dago hemen txarto?* [seinalatzen du hasierako problema: *4 + 7 = 11 – 2 = 9*]
19 Txomin: *Ah…*[Isilik unetxo batean]… *bai…ba* [berdintzara seinalatuz] *balantza ez dagoela zuzen….*
20 Irakaslea: *Nola jarriko zenuke zuzen?*
21 Txomin: *Horrela?* [zera idazten du: alde batetik 4 + 7 = 11 eta bestaldetik, bereziturik, 11– 2 = 9].
22 Irakaslea: *Oso ondo, harrapatu duzu eta!*

Txominek zuzen ebatzi zuen buruketa baina maila honetako ikasleekin maiz gertatzen da berdintzak pentsatu ahala idazten dituztela eta zail egiten zaiela ulertzen zergatik euren adierazteko era ez datorren bat notazio matematiko formalarekin

Sintaxi formala azaltzeko irakasleak hartzen du objektu fisikoen arlotik balantzaren funtzionamendua eta erabiltzen du modu metaforikoan, berdintzaren sinbolo izango balitz bezala. Umeak, beraz, hautematen du funtzionamendu hori lengoaia matematikora eraman behar duela orientatzeko sinboloen erabilpena.

3.kasua

Hirugarren adibide honetan ere bloke base anitzak ere erabiliko dira (Cascallana, 1988); haiz zuen ere, batuketaren ulerkuntza hobetzeko. Ikasleak, lehenengo hezkuntzako bigarren zikloko mutiko batek, 24 + 13 ebazten jakin arren, bere ulerkuntzak mekanikoa dirudi. Irakasleak bloke base anitzen bidez saiatzen da adikuntza maila hobetzen.

1 Irakaslea: *…zuk badakizu zenbat den 24 + 13?*
2 Xabier: *bai* [pentsakor]*…37, bai?*
3 Irakaslea: *bai,…nola egin duzu? Idatziko zenuke?*
4 Xabier: *horrela…*[idazten du 24 eta bere azpian 13, gero batekoak batzen ditu, 4 gehi 3, eta amaitzeko, hamarrekoak; hau da 2 gehi 1. Emaitza: 37]
5 Irakaslea: *Oso ondo, bada,…begira ezazu zer topatu nuen lehengo batean. Batek batuketa halaxe egin zuen: 24 + 13 = 4 + 3 + 2 + 1= 10*
6 Xabier: *Eh! Txarto dago!*
7 Irakaslea: *zergatik?*
8 Xabier: *ba,… horrela ez delako egiten…*
9 Irakaslea: *zergatik?*
10 Xabier: *Txarto dagoelako. Horrela ez didatelako ikastolan irakatsi* [ikasleak prozedurazko akatsa atzematen dio baina ezin dio kontzeptuzko akatsari heltzen].
11 Irakasle: *Ea asmatzen dugun zertan den txarto. Ondo?*
12 Xabier: *Bale.*
13 Irakaslea: *Gogoan duzu kubotxoen jokoa?* [irakasleak hartzen du biontzat ezaguna zen bloke base anitzen jokoa]

14 Xabier: *bai,…*
15 Irakaslea: *zenbat kubotxoko behar duzu egiteko erregeleta bat?*
16 Xabier: *10.*
17 Irakasle: *Ondo. Nola jarriko zenuke joko honen bidez 24?*
18 Xabier: *2 erregeleta eta 4 kubotxo*
19 Irakaslea: *Primeran. Eta 13?*
20 Xabier: *Erregeleta bat eta hiru kubotxo*
21 Irakaslea: *Ederto. Eta bien batuketa?*
22 Xabier: *3 erregeleta* [bi hamarreko + hamarreko bat] *eta 7 kubotxo* [hau da, 4 bateko eta 3 bateko].
23 Irakaslea: *Oso ondo, eta, aizu, orain hasierako galdera, zergatik dago txarto eginda:*
24 + 13 = 2 + 1 + 4 + 3 = 10?
24 Xabier: [pentsakor] *Ah, bai! Batu direlako erregeletak kuboekin!*
25 Irakaslea: *Oso ondo. Eta zergatik ezin dira nahastu?*
26. Xabier: *Hombre! Erregeletak eta kubotxoak ezberdinak direlako!*

Xabierrek bazekien zuzen egiten batuketa baina planteaturiko ebazpen okerraren muina esplikatzen ez jakiteak irakasleari pentsatzeko bide ematen dio akaso bere ulerkuntza mekaniko samar izan daitekeela. Honengatik eta aintzat hartuz edade honetako umeek jakin behar dutela zenbaki baten posizioak duen garrantzia eta posizioak nahasteak suposatzen duen akatsa, esku-hartze didaktiko egitea erabakitzen du irakasleak.

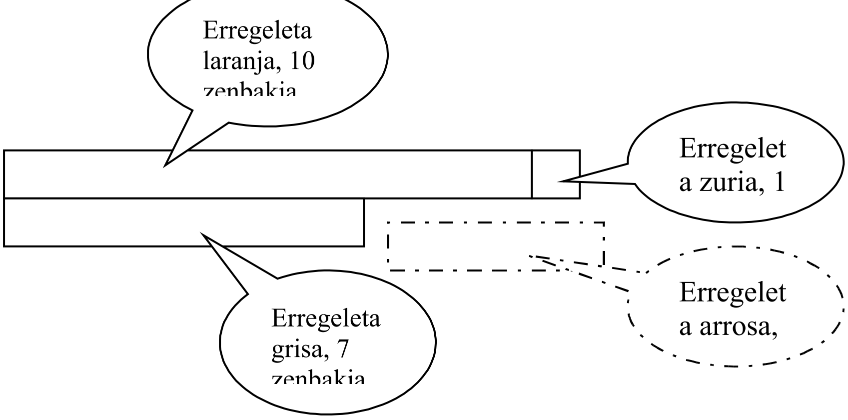
Ulerkuntza sustatzeko irakasleak erabilitako metodo manipulagarriak argiro uzten du hamarrekoak eta batekoak "fisikoki" ezberdinak direla. Jakina, egiatan hamarrekoak ez dira erregeletak eta batekoak ez dira kubotxoak baina metaforikoki hala erabiltzen dira; hau da, elementu fisikoekin sorturiko diskurtso erreala estrapolatzen da zenbakien diskurtso abstraktura.

4.kasua

Azken adibide honetan buruketa bat egiteko irakasleak Cuisinaire-ren erregeletak erabiliko ditu (Fernández, 1989; Cascallana, 1988). Lehenengo hezkuntzako bigarren zikloko ume batek bi zenbakien arteko aldea kalkulatzen ditu zenbaki txikien arteko aldea buruz dakielako (kasu honetan 11 eta 7ren arteko aldea) baina zenbaki handiekin ez dut prozedurarik. Irakasleak irakatsi gura dio kenketaren bidez egin daitekeela.

1 Irakaslea: *…Aizu, galderatxo bat, 7 urte baduzu, zenbat falta zaizu 11 izateko*
2 Mertxe: *11 izateko bada,… 7tik 10era,…4* [neskatoak deskonposatu bide zuen eragiketa bitan, 7tik 10era eta 10etik 11etara].
3 Irakaslea: *Ondo, nola dakizu zuzena den?*
4 Mertxe: *bada…7 gehi 4, 11 direlako.*
5 Irakaslea: *eta nire kasuan,…37 urte badut zenbat falta zait 54etara ailegatzeko?*
6 Mertxe: *uf…ez dakit* [interesa galtzen hasten da].
7 Irakaslea: *begira hau* [Cussiare-ren erregeletak dira]
8 Mertxe: *ah bai,…*[berriro elkarrizketarekiko interesa; izan ere, erregeletak ezagutzen zituen]
9 Irakaslea: *Nola jarriko zenuke zenbat falta diren 11etarako 7 badituzu?*

10 Mertxe: *Hala*



11 Irakaslea: *Eta nola dakizu falta dena?*
12 Mertxe: *Frogatzen dut beste erregeletekin,…*
13 Irakaslea: *eta,… zein da?*
14 Mertxe*: erregeleta arrosaz* [4 zenbakia]
15 Irakaslea: *eta beste modurik?*
16 Mertxe: *Ez dakit*
17 Irakaslea: *bai adibidez, zer gertatuko zaie erregeleta hauei* [10 eta 1 erregeletei] *kentzen badiegu beste erregeleta hau?* [7 zenbakiaren erregeleta]
18 Mertxe: *Ah bai, beste erregeleta hau geratzen dela* [hau da, 4 erregeleta]
19 Irakasle: *Ondo* [idazten du] *11 – 7 = 4, ezta?*
20 Mertxe: *bai*
21 Irakaslea: *Beraz 7tik 11ra zenbat dagoen jakiteko, 11ri kentzen diogu 7, bai?*
22 Mertxe *bai*
23 Irakaslea: *eta 37tik 54era zenbat dagoen jakiteko?*
24 Mertxe: *Uf* [berriro zalantzan, eta interesa galduz]
25 Irakaslea: *Animo. Imajina ezazu daukagula 54 erregeleta luze luzea eta beste bat 37 izateko. Nola jakingo genuke zenbat falta den?*
26 Mertxe: *ah, bai, bata bestearekin jarri* [esan nahi du elkarren ondoan jartzeko] *eta ikusi zenbat falta den*
27 Irakaslea: *zure adinaren kasuan nola egin genuen.*
28 Mertxe: *hamaikari kendu behar 7*
29 Irakaslea: *Oso ondo, eta nire adinari?* [atzamarrez seinalatzen du 54 zenbakia]
30 Mertxe: *honi kendu hau* [atzamarrez seinalatzen du 37]
31 Irakaslea: *oso ondo! Egingo duzu?*
32 Mertxe: *nekatuta nago…*

Mertxek zenbaki txikien arteko aldea ezagutzen du buruz ikasita duelako baina memoriazko estrategia horrek kale egiten dio zenbaki handiekin. Irakasleak Cuisinaire-ren erregeletek ematen duten oinarri fisikoaren laguntzaz aldamio-lanarena egiten du ikasleak berak aurki dezan estrategia hori.

Azkenean ikasleak ikusten du kenketa baten laguntza zenbaki handiren arteko aldea kalkula daitekeela Cuisinaire-ren adibidea estrapolatuz. Hala eta guztiz ere akzio didaktikoa amaitu gabe geratzen da ikaslearen interes faltagatik (bestelako gogoeta izan daiteke jakitea zein den interes falta horren jatorria: diseinu didaktiko ala kontzeptuaren muinari heltzeko zailtasuna).

Argi dirudi irakasleak beste une batean ikasle honekin berriro erabili beharko duela gai bera baina Cuisinaire-ren erregeletekin eginiko jarduerak oinarri sentsorial moduko abiapuntua ezartzen du geroko planteamendu didaktikoa erraz dezakeena.

Ondorio eta inplikazio didaktikoak

Matematikaren ikaskuntzarako tresna manipulagarrien erabilpenak dakartzan hobariak hainbat autorek nabarmendu arren (Cañizares, 2003; Grouws eta Cebulla 2000; Villarroya, 1994; Martín, 1998; Fernández, 1989; Sowell, 1989; Cascallana, 1988; Suydam & Higgins, 1977), zenbait ikerlanetan datu kontrajarriak aipatu dira. Uttal eta DeLoache-ek (1997) nabarmendu zuten, zenbait kasutan ulerkuntza sakonagoa suspertu arren, teknika didaktiko hauen eraginkortasuna baldintzatuta egon daitekeela objektuen ezaugarrien eta didaktikaren diseinuaren aldetik. Ikerlari hauen tesi nagusiaren arabera, objektu konkretuak sinboloen ordezko gisa hartuak izan badira ere, izatez, sinboloen izaera berbera dute eta ondorioz, ezin da uste izan kontzeptuen ulerkuntza eramaileak direnik.

Honen ondorioz, didaktika hauek efektiboak izango badira, ezinbestean ziurtatu behar da ikasleari irakasten zaiola zein lotura dagoen sinbolo eskuztagarri horiek eta nozio matematikoen artean. Clements-ek (1999) ere bat dator tresna konkretuei esanahiak sortzeko berezitasunik ez izatea delako ideia horrekin eta nabarmentzen du instrumentu didaktiko hauen erabilpena justifikatua izanik ere ez direla panazea, *“tresna manipulagarrien erabilpena ez da ikaskuntza esanguradunaren bermea* (46.orr.).

Horrela izanik, gogoeta egiteak gomendagarri dirudi tresna manipulagarri eta objektu konkretuen bidezko diseinu didaktikoez, irakaslan eraginkorragoak planifikatu ahal izateko.

Taula 1: Diseinu didaktiko aurkeztuen konparaketa

	Objektu manipulagarria ala bere simulazioan oinarrituriko esperientzia sentsoriala	*Esperientzia horren estrapolazio metaforikoa matematikako diskurtsora*
1 kasua	Bloke base anitzekin trukatze arauaren bidez egiten den jokoa; hamartarra ala hirutarra.	55 eta 2001 digituek irudikatzen duten zenbakia ulertu behar da bloke base anitzak izango balira bezala
2 kasua	Balantza orekatu behar da erretiluetan kantitate berbera jarriz	Balantza izango balitz bezala berdintza ere izan behar du albo bitan kantitate bera
3 kasua	Bloke base anitzetan lehenengo posizioa kubotxoei dagokiena da, bigarrenari erregeletak, hirugarrenari plakatxoa eta azkenari kuboak	Zenbakien digituetako posizioen arteko ezberdintasuna ulertu behar da blokeetakoa balitz bezala. Forma geometriko ezberdinak nahasterik ez dagoen bezala, bateko, hamarreko eta ehunekoak ere ezin dira nahastu.
4 kasua	Cuisinaire-ren erregeletekin luzera ezberdineko bi erregeletak konparatuz, txikiari atxiki dakioke osagarri bat luzera betetzeko.	Bi zenbakiren arteko aldea ezagutzeko ere zenbaki osagarria bilatzean datza, adibideko erregeleten osagarria balitz bezala.

Puntu honetaz, artikuluan lau pasarte didaktikoren berri eskaintzen da zeinetan ematen baitu ikasleen tresna manipulagarrien gaineko erabilpen esanguradun suertatzen dela. Pasarte hauetan, zenbait aspektu komun agertzen dira ikaskuntza matematiko eta tresna manipulagarrien erabilpenak uztartzen dituztenak eta arestian planteaturiko gogoetaz argibiderik eman dezaketenak.

Elementu komun hauek ondokook izan daitezke:

- Objektu manipulagarrietan ala bere simulazioan oinarrituriko esperientzia sentsoriala (1.taula, 1.zutabean).
- Esperientzia sentsoriala matematika diskurtsorako estrapolazioa (1.taula, 2.zutabean).
- Elkarrekintza komunikatiboa; hau da, irakasle eta ikaslearen arteko aktibitate komunikatibo aktiboa entendimendu komunera ailegatzeko

Lehenbiziko bi elementuen azalpena 1.taulan aurki daitezke eta, oro har, deskribapenak dira; lehenengoa, erabilitako esperientzia sentsorialaz eta, bigarrena, esperientzia horren inguruan egiten den erabilpen metaforikoa diskurtso matematikoan. Hirugarren puntuari dagokionez, hots, interakzio komunikatiboaz, elementu kritikoa dirudi tresna manipulagarrien erabilpen didaktikoa eraginkorra suerta dadin.

Sfard-ek (2000a) nabarmendu bezala, matematikaren gaineko komunikazioan solaskideen arteko komunikazio-erreferente berbera izatea derrigorrezko osagarria da komunikazioa ez ezintzeko; hau da, interakzioan zehar solaskideek mintzagai berberaz aritzen direlako uste sendoa behar dute.

Matematikaren gaineko komunikazioan, ordea, komunikazio erreferente berbera izatea zaila da, batez ere, kideen arteko ulerkuntza maila oso ezberdina izaten denean. Arazo hau, bestalde, ez da konpontzen sinboloen sartzearekin; izan ere, sinboloek ez dute ziurtatzen ulertze berbera.

Tresna manipulagarrien bidez eta, oro har, esperientzia sentikorraz, lortzen da espazio semantiko komuna irakasle eta ikaslearen artean, komunikazio erreferente berbera izatea ziurtatzen duena (esate-baterako bloke base anitzekin eginiko “trukatze-jokoa”, “balantza”-ren funtzionamendua ala Cuisinaire-ren erregeletako osagarriaren bilaketa). Espazio honetan komunikazio-kideek objektu fisikoen bidezko jokamolde linguistiko komuna entsea dezakete, geroan, metafora moduan, matematikaren diskurtsora pasatuko dutena. Hain zuen ere, Sfardek (2000a) aipatzen du hauxe dela transplante linguistiko mota bat, diskurtso errealetik diskurtso abstraktura igarotzen dena.

Hauxe izan daiteke tresna manipulagarrien benetako balio didaktikoa; komunikazio kideen arteko espazio semantiko eta komunikatibo komuna finkatzeko aukera ematea. Tresna manipulagarriek aukera hori ematen dute elementu fisikoen diskurtsoan kokatzen direlako; hau da, pertzepzioak gidaturiko komunikazioan non erreza den mintzagaien erreferente komunak izatea, betiere, esperientzi sentsorialak konpartitzen direnean.

Hortaz, diskurtso errealetik sortzen dira kontzeptu abstraktuak erabiltzeko klixe linguistikoak. Klixe edo estereotipo hauen bidez matematikako zereginetan hasberriak matematika kontzeptuak erabili ahal izango ditu, baita beren ulerkuntza sakona bereganatu gabe ere; izan ere, klixe hauen bidez, erabiliaren erabiliz eta interakzio sozialaren bidez, sortuko da benetako ulerkuntza matematikoa.

Eskenatoki honetan zenbait ondorio ateratzen dira:

1. Matematikaren irakaskuntzarako espazio komunikatibo komunak sortzea elementu kritikoa izan daiteke. Pertzepzioa eta, oro har, esperientzia fisikoa, izaten da espazio komun hori eskuratzeko bidea. Hartara, kontzeptu abstraktuen eraketan elementu manipulagarriek, objektuek, simulazioek eta esperientzia komunek izan behar dute irakaslanaren helduleku ezinbestekoa.

2. Kontzeptu abstraktuen ulerkuntza prozesu sozio-konstruktiboa da zeinetan elementu fisikoetan oinarrituriko komunikazio-moldeak transplantatzen diren diskurtso matematikora, erabilpen metaforikoen bidez. Honen ondorioz, irakasle-ikaslearen arteko interakzio komunikatiboa ulerkuntzaren gako inportanteenetakoa da. Elkarrekintza horretatik ikasleak irizpideak hartzen ditu matematika kontzeptuen inguruan egiten duen erabilpen linguistikoa formalki exijitzen den esanahietara doitzeko.

3. Kontzeptu abstraktuen ulerkuntza prozesu sozio-konstruktibo hau komunikazio-moldeak patroi formaletara doitzean datzanez, ikasleak une orotan metafora eta formaltasunaren arteko tentsioan gidatu beharko du bere ulerkuntza (Sfard, 2000a, 2000b) eta tentsio-gune honetan ikasleak egiten dituen asmatzeak bezain garrantzizkoak erroreak dira; izan ere batzuek zein besteek modu berean bideratzen baitute kontzeptuaren erakuntza.

Bibliografia

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of mathematics education. *American Educator, 16*(2), 14-18, 46-47.

Brown, J.S.; Collins, A.; & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher. 18*(1), 32-42.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction. Cambridge*, MA: Belknap Press.

Cascallana, M, T. (1988). *Iniciación a la matemática (materiales y recursos didácticos).* Santillana: Madrid.

Cañizares, J.M.; Castro, E. (2003). Educación lógico matemática. In: J.L. Gallego & E. Fernández (Zuzendariak). *Enciclopedia de educación infantil.*(220-253.orr.). Madrid: Aljibe.

Clements, D. (1999). “Concrete” manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*, 1, 45-58

Fernández, J.A. (1989). *Los números en color de G. Cuisenaire*. Seco Olea: Madrid.

Fueyo,V. & Bushell,D.(1988). Using number line procedures and peer tutoring to improve the mathematics computation of low-performing first graders. *Journal of applied behavior analysis, 31,* 3, 417-430.

Godino, J.; Batanero, C.; Roa, R. (2006). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 3-36.

Grouws, D. A. & Cebulla, K. J. (2000) Improving student achievement in mathematics. Recommendations for the classroom. International Bureau of Education. UNESCO. Retrieved Febrery 25, 2007 from: http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001254/125453e.pdf

Ginsburg, H. & Golbeck, S. (2004). Thoughts on the future of research on mathematics and science learning and education. *Early Childhood Research Quarterly 19*, 190–200.

Hiebert, J.;Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for research in mathematics education, 22*, 98-122.

Labinowicz, E. (1985). *Learning from students: new beginnings for teaching numerical thinking*. Menlo Park, CA,Addison-Wesley.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation. Cambridge*. Cambridge University Press.

Martín, M. E. (1998). *Creencias y prácticas del profesorado de primaria en la enseñanza de las matemáticas*. Tesis doctoral inédita. Universidad de La Laguna

Marzano, R.J., Gaddy, B.B., & Dean, C. (2000). *What works in classroom instruction*. Aurora, CO: Mid-continent Research for Education and Learning. Retrieved Febrery 25, 2007 from: http://www.mcrel.org/PDF/Instruction/5992TG_What_Works.pdf

Meira,L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 29,* 2, 121-142

Modesto, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. *Revista de psicodidáctica, 5,* 107-114.

Moyer, P. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in mathematics, 47,* 175-197.

Resnick, L.; Omanson, S. (1987). Learning to understand arithmetic. In: Glaser, R., ed. *Advance in instructional psychology*, *3*, 41–95 orr. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

Quintero, R.; Ruiz, D.; Terán R. (2005). Las interpretaciones del simbolo “x” en los polinomios. *Educere: Revista Venezolana de Educación, 33,* 315-326 orr.

Sfard, A. (2000a). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb,K. E. Yackel, & K. McClain (Eds), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (37-98 orr.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sfard, A. (2000b). Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 3, 296-327.

Starkey, P.; Klein, A.; Wakeley A. (2004). Enhancing young children’s mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly,19,* 99–120.

Skemp, R. (1999). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. 3ª edición. Madrid: Morata

Sowell, E.J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education, 20*, 498–505.

Suydam, M.; Higgins, J. (1977). Activity-based learning in elementary school mathematics: recommendations from research. Columbus, OH, ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Thompson, P. (1992). Notations, conventions, and constraints: contributions of effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for research in mathematics education, 23*,123–47.

Uttal, D., & DeLoache, J. (1997). Manipulatives and Symbols: A new Perspective on the Use of Concrete Objects to teach Mathematics. *Journal of applied developmental psychology*, *18*, 37-54.

Villarroel, J. (2002). *La comprensión de las propiedades físicas de la materia*. Tesis doctoral no publicada, Universidad del País Vasco, Bilbao, Espainia.

Villarroya, F. (1994). El empleo de materiales en la enseñanza de la geometría. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado, 21*, 95-104.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason*. London: Routledge.

Welch, M. (1997). Students’ use of three-dimensional modeling while designing andmaking a solution to a technical problem. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Chicago. Retrieved Febrery 25, 2007 from: http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2/content_storage_01/0000000b/80/23/52/e9.pdf